Concours Centrale - Supélec 1999

Épreuve : MATHÉMATIQUES I — Filière TSI

Le but de ce problème est l'étude des solutions réelles d'une équation différentielle.

Les trois parties de ce problème sont dans une large mesure indépendantes.

Notations

Pour tout entier relatif k l'intervalle $]-\pi/2+k\pi, \pi/2+k\pi[$ est noté I_k.

On considère les équations différentielles linéaires :

$$(E_0) \quad \cos(x)(1+\cos^2(x))\,y' + \sin^3(x)\,y = 0$$

$$(E_1) \quad \cos(x)(1+\cos^2(x))\,y' + \sin^3(x)\,y = \sin(x)\cos(x)$$

Partie I -

I.A -

I.A.1) Montrer que les intégrales :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 t}{\cos t(1+\cos^2 t)}\,dt \text{ et } \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{\sin^3 t}{\cos t(1+\cos^2 t)}\,dt \text{ sont divergentes.}$$

I.A.2) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction :

$$f : x \mapsto f(x) = \int_0^x \frac{\sin^3 t}{\cos t(1+\cos^2 t)}\,dt$$

I.B -

I.B.1) Décomposer en éléments simples sur le corps des réels la fraction rationnelle :

$$\frac{1-X}{X(1+X)}$$

I.B.2) À l'aide d'un changement de variables, calculer $f(x)$ pour x appartenant à I_0.

I.C - Résoudre l'équation différentielle (E_0) sur l'intervalle I_k pour tout entier relatif k.

I.D - Existe-t-il des solutions de (E_0) de classe C^1 sur $\mathbb{R}$?

I.E - Exprimer les solutions de (E_1) sur I_0 à l'aide des fonctions F_λ définies sur $]0, +\infty[$ par :

$$F_\lambda(u) = \frac{u}{1+u^2}\ln\left(\frac{u}{\lambda}\right) \text{ où } \lambda \text{ est un réel strictement positif.}$$

I.F - L'équation (E_1) admet-elle des solutions de classe C^1 sur $\mathbb{R}$?

I.G - On considère la courbe Γ_λ d'équation $y = F_\lambda(x)$.

I.G.1) Construire la courbe Γ_2.

I.G.2) Soit a un nombre réel strictement positif et différent de 1. Montrer que les tangentes D_λ au point d'abscisse a des courbes Γ_λ sont concourantes en un point noté $M(a)$.

I.G.3) Construire le lieu des points $M(a)$ quand a varie.

Partie II - Étude d'une courbe intégrale de (E)

Soit h la fonction définie sur $[-1,1]$ par $h(1) = h(-1) = 0$ et pour tout x appartenant à $]-1,1[$:

$$h(x) = \exp\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)$$

II.A - Montrer que la fonction h est de classe C^∞ sur $[-1,1]$ (on pourra faire une démonstration par récurrence).

II.B -

II.B.1) Étudier le signe de $h''(x)$, pour x appartenant à $]-1,1[$ et en déduire que $\forall x \in]-1,1[,\ |h'(x)| < 1$.

II.B.2) Étudier les variations de h sur $[-1,1]$.

II.B.3) Montrer qu'il existe un et un seul réel L appartenant à $[-1,1]$ tel que $h(L) = L$. On pose $\alpha = \text{Arccos}(L)$.

MA Saisie ou Bau...ier ISI Maths 2e ter 98 - Version du 2e mars 1998 11:45

II.C - Étudier la suite définie par : $u_0 \in]\,0, 1\,[$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = h(u_n)$. Montrer que cette suite converge vers L. Montrer que L est compris entre les valeurs de deux termes consécutifs de la suite.

II.D - Donner un algorithme permettant de calculer pour un entier donné p la valeur de u_p.

Application : si $u_0 = 0$ donner une valeur approchée de u_{10} et u_{11} puis justifier l'inégalité : $|L - u_{10}| \leq |u_{11} - u_{10}|$.

En déduire une valeur approchée à 10^{-2} près de α.

II.E - On définit la fonction g sur I_0 par $g(x) = F_1(\cos x)$, (où F_1 est défini à la question I.E).

II.E.1) Vérifier que $g'(\alpha) = 0$.

II.E.2) Étudier les variations de g.

II.E.3) Construire la représentation graphique de g en prenant comme unité 5 centimètres et préciser les tangentes aux points d'abcsisse 0 et $\frac{\pi}{2}$.

Partie III - Développement en série de Fourier d'une solution de (E_0)

Soit G la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $G(x) = \dfrac{2\cos(x)}{1 + \cos^2(x)}$.

III.A -

III.A.1) Montrer que G est développable en série de Fourier sur $\mathbb{R}$.

III.A.2) Prouver qu'il existe une suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \cos(2n+1)x$$

(on ne demande pas de calculer les valeurs de α_n).

III.B - On considère la fraction rationnelle :

$$H(X) = \frac{1 + X}{X^2 + 6X + 1}$$

III.B.1) Montrer que $G(t) = 4e^{it} H(e^{2it})$.

III.B.2) Décomposer $H(X)$ en éléments simples. On posera $c = 3 - 2\sqrt{2}$. Quelle est la valeur de A pour laquelle :

$$H(X) = A\left[\frac{1}{X + c} + \frac{1}{cX + 1}\right]$$

III.C - En déduire, grâce à des développements en séries entières par rapport à X ou à $\frac{1}{X}$, le développement en série de Fourier de G et la valeur des termes de la suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

III.D - Quel est le développement en série de Fourier de la fonction G_1 définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$G_1(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \ln\left(\frac{\sqrt{2} + \sin(x)}{\sqrt{2} - \sin(x)}\right)$$

••• FIN •••